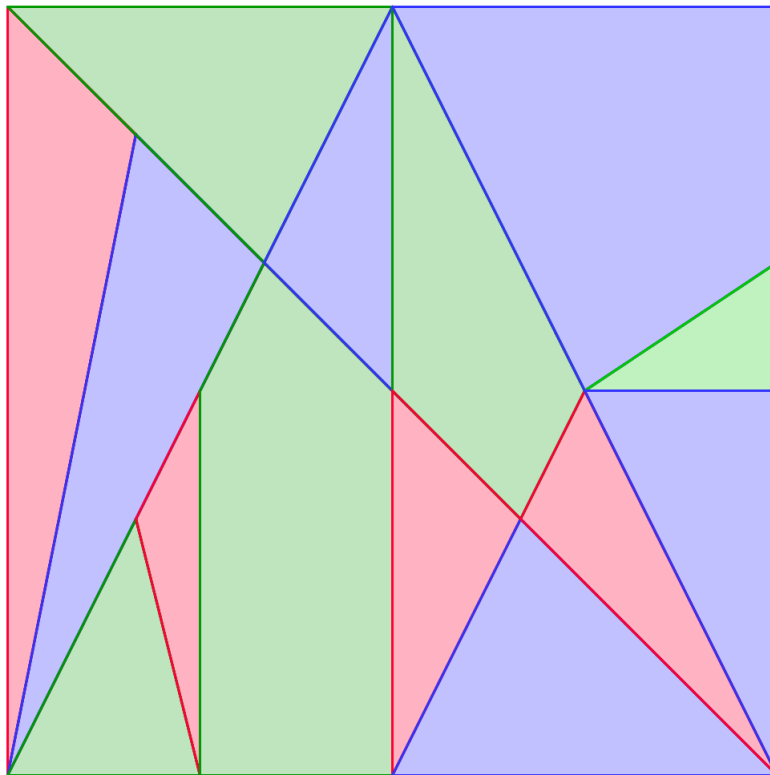

TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Matti Koskinen



Ostomakhion,
Antiikin vatsavaivoista nykypäivän
ongelmanratkontaan

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Kesäkuu 2014

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
KOSKINEN, MATTI: Ostomakhion, antiikin vatsavaivoista nykypäivän on-
gelmanratkontaan
Pro-gradu -tutkielma, 26 s.
Matematiikka
Kesäkuu 2014

Tiivistelmä

Tämän tutkielman tarkoitus on esitellä antiikin ajan peli nimeltä Ostomakhion ja tutkia sen eri ratkaisuja kombinatoriikan ja graafiteorian näkökulmista. Tutkielma on pyritty kirjoittamaan niin, että käytettyyn matematiikkaan entuudeltaan perehtymätönkin voisi sitä seurata.

Ostomakhion on 14-osainen palapeli, jonka osat muodostavat neliön. Palloista voidaan muodostaa useita eri ratkaisuja, siis neliö voidaan rakentaa monella tavalla. Matemaattisesti kiinnostavaa on, kuinka monta näitä ratkaisuja voidaan kaiken kaikkiaan muodostaa. Lisäongelma syntyy verratessa erilaisia ratkaisuja; jotkin ratkaisuista ovat niin samanlaisia keskenään, että on perusteltua väittää niitä samoiksi ratkaisuiksi.

Tutkielman alkuosassa esitellään Ostomakhion sekä tutkitaan sen kombinatoriikkaa. Myöhemmässä osassa esitellään graafiteorisin keinoin malli, jolla voidaan käydä kaikki Ostomakhionin ratkaisut järjestelmällisesti läpi.

Lukijalta odotetaan lähinnä kiinnostusta aiheeseen ja matemaattista otetta ongelmanratkontaan. Käytetyt kombinatoriikan ja graafiteorian käsitteet pyritään avaamaan niin, ettei esitietoja näiltä aloilta tarvittaisi. Tutkielman pääasiallinen lähde on Fan Chungin ja Ron Grahamin sivusto *A tour of Archimedes' STOMACH*. Kombinatoriikka on peräisin Heikki Junnilan diskreetin matematiikan kurssikirjasta ja graafiteoria Pertti Koiviston ja Riitta Niemistön kurssikirjasta. Arkhimedeen historialähteinä on Melvyn Braggin *On giants' shoulders*, Hannu Korhosen *Matematiikan historian henkilöhahmoja*, sekä sivusto *The Archimedes Palimpsest*. Apuna tutkielman kuvituksessa on ollut ohjelmistot Geogebra, ja Paintshop Pro X.

Sisältö

1	Johdanto	4
2	Ostomakhion ja sen historiaa	4
2.1	Arkhimedes ja Ostomakhionin löytäminen	4
2.2	Ostomakhionin määritelmä	5
3	Kombinatoriikkaa	6
3.1	Kombinatoriikan perusteita	7
3.2	Ostomakhionin kombinatoriikkaa	7
3.3	Ostomakhionin eri ratkaisut	10
3.4	Ratkaisujen järjestelmällinen esittäminen	11
4	Graafiteoriaa	13
4.1	Graafiteorian perusteita	14
4.2	Ostomakhion graafeina	15
4.3	Ostomakhionin supergraafi	22
5	Lopuksi	24
	Viitteet	26

1 Johdanto

Tämän tutkielman tarkoitus on esitellä antiikin ajan peli nimeltä Ostomakhion ja tutkia sen eri ratkaisuja kombinatoriikan ja graafiteorian näkökulmista. Tutkielma on pyritty kirjoittamaan niin, että käytettyyn matematiikkaan entuudeltaan perehtymätönkin voisi sitä seurata.

Luvussa 2 esitellään lyhyesti Arkhimedeen ja Ostomakhionin historiaa antiikista nykypäivään ja esitellään eri muotoja Ostomakhionin ongelmalle. Luvussa 3 käydään läpi kombinatoriikan alkeita ja esitellään miten eri ratkaisuja Ostomakhionin ongelmaan voidaan löytää. Luvussa 4 käydään läpi graafiteoriaa ja havaitaan, että lähes kaikki Ostomakhionin ratkaisut voidaan esittää Hamiltonin syklinä.

Lukijalta odotetaan lähinnä kiinnostusta aiheeseen ja matemaattista otetta ongelmanratkontaan. Käytetyt kombinatoriikan ja graafiteorian käsitteet pyritään avaamaan niin, ettei esitietoja näiltä aloilta tarvittaisi. Tutkielman pääasiallinen lähde on Fan Chungin ja Ron Grahamin sivusto *A tour of Archimedes' STOMACH*. [1] Kombinatoriikka on peräisin Heikki Junnilan diskreetin matematiikan kurssikirjasta [5] ja graafiteoria Pertti Koiviston ja Riitta Niemistön kurssikirjasta [6]. Arkhimedeen historialähteinä on Melvyn Braggin *On giants' shoulders*, Hannu Korhosen *Matematiikan historian henkilöihahmoja*, sekä sivusto *The Archimedes Palimpsest*. [2][3][4]. Apuna tutkielman kuvituksessa on ollut ohjelmistot Geogebra, ja Paintshop Pro X.

2 Ostomakhion ja sen historiaa

2.1 Arkhimedes ja Ostomakhionin löytyminen

Arkhimedes syntyi noin 287 eaa Syrakusassa, Sisiliassa, rikkaaseen perheeseen. Nykyajan tietämys Arkhimedeestä perustuu pieneen määrään lähteitä, joista suuri osa on koottu kirjoituksiksi vasta vuosisatoja Arkhimedeen kuoleman jälkeen. Arkhimedestä on pidetty aikansa ja kaikkien aikojenkin merkittävimpänä ajattelijana. Hän oli monialainen matemaatikko ja fyysikko, ja sai aikaan huomattavia tuloksia molemmilla aloilla. Hän kehitti tuloksia mm. mekaniikan ja hydrostaatiikan aloilla, ymmärsi sellaisia käsitteitä kuin noste ja painokeskipiste, todisti täsmällisesti vipuvarren toimintaperiaatteen ja loi erilaisia mekaanisia sovelluksia aikansa matematiikalle ja fysiikalle. Matemaatiikan puolella Arkhimedes esimerkiksi haarukoi piille huomattavan tarkan likiarvon, kehitti käsitellä suuria lukuja potenssien potenssien avulla ja arvioi erilaisten kappaleiden pintoja ja tilavuuksia integraalilaskennan avulla 2000 vuotta ennen kuin moderni integraalilaskenta kehitettiin.

Arkhimedes kuoli 212 eaa. Syrakusan valtauksen yhteydessä. Häntä haettiin lähetetty sotilas surmasi Arkhimedeen, kun tämä ei suostunut jättämään matemaattista ongelmaa ennen kuin oli valmis sen kanssa. [2][3]

Suuri määrä Arkhimedeen tuloksia on kadonnut historiaan. Näin kävi myös Arkhimedeen kirjoituksille Ostomakhionista, kunnes ne löydettiin jälleen keskiaikaisen rukouskirjan sivuilta. Rukouskirja on kirjoitettu pergamenteille, joista suurin osa oli aiemmin sisältänyt kopioita Arkhimedeen eri kirjoituksista. Kirjoitukset poistettiin pergamenteilta, jotta sivut voitaisiin uusiokäyttää rukouskirjaa varten. [4]

Jossain vaiheessa Arkhimedes siis tutki peliä nimeltä Ostomakhion. Ilmeisesti Arkhimedes yritti arvioida pelin eri ratkaisujen määrää. Tämä on historiallisesti merkittävää, sillä siinä missä on tiedetty antiikin Kreikassa tutkitun mm. geometriaa ja lukuteoriaa ja Arkhimedeen tapauksessa jopa differentiaali- ja integraalilaskentaa, on Ostomakhion ensimmäinen merkki siitä, että Kreikassa olisi tutkittu myös kombinatorisia ongelmia.

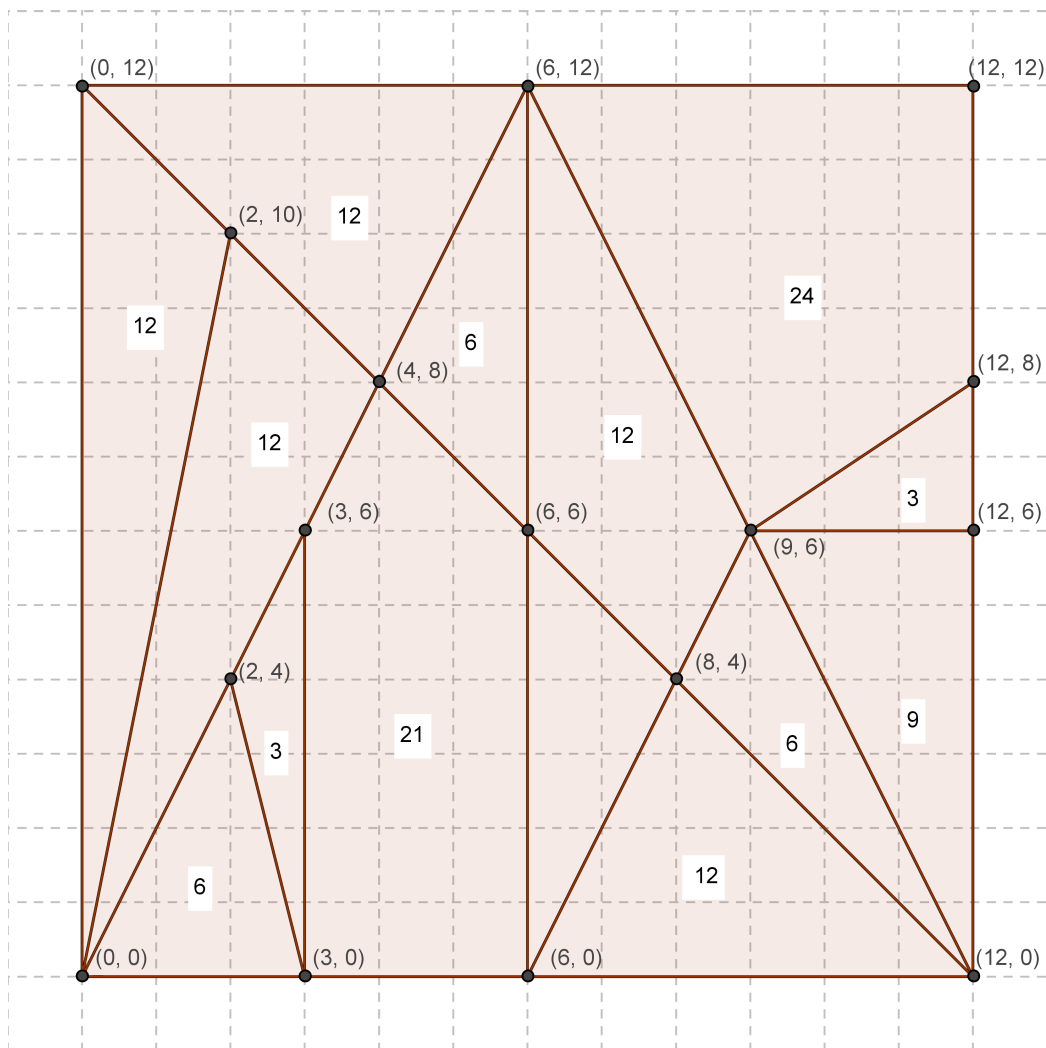
Ei ole tiedossa, millaisia tuloksia Arkhimedes sai Ostomakhionin suhteen. Pelin löydyttyä uudelleen 1900-luvulla mainittu kombinatorinen ongelma lopulta ratkaistiin, Bill Cutler oli ensimmäinen joka laski ratkaisut koneellisesti. Tutkielman tulevissa osioissa esitellään Ostomakhioniin liittyvää kombinatoriikkaa, sekä pohditaan ratkaisujen järjestelmällistä esittämistä graafiteorian kautta.

2.2 Ostomakhionin määritelmä

Tunnetuimmassa muodossaan Ostomakhion on neliön mallinen palapeli, joka koostuu 14 osasta. Näihin lukeutuu 11 kolmiota, 2 nelikulmiota, sekä yksi viisikulmio. Joidenkin tulkintojen mukaan pelin ei pitäisi olla neliön mallinen, vaan suorakulmio, jonka sivut olisivat suhteessa 2 : 1 ja kaikki palat venytettyjä samassa suhteessa. Jos peliä tutkittaisiin tällaisena suorakulmiona, muuttuisi ratkaisujen määrä olennaisesti. Tässä tutkielmassa keskitytään neliön malliseen peliin.

Mikäli Ostomakhion piirretään 12×12 -ruudukkoon, ovat kaikki sen koordinaatit tasalukuisia. Tälläin piirrettyssä kuviossa myös palojen pinta-alat ovat kokonaisissa ruuduissa mitattavissa. Palojen pinta-alojen suurin yhteinen tekijä on 3, minkä pohjalta on selvää, että jokainen pala on pinta-alaltaan $\frac{3n}{144} = \frac{n}{48}$ koko Ostomakhionin pinta-alasta, missä n on jokin positiivinen kokonaisluku. Ostomakhionin palat voidaan määritellä tarkoin kuvan 1 näytetämän mallin mukaisesti; ne ovat siis sellaiset palat, joista voidaan rakentaa kuvassa 1 esitelty ratkaisu.

Yksittäisen ratkaisun löytäminen on vain osa peliä. Matemaattisesti kiinnostavampaa on pyrkiä löytämään kaikki ratkaisut. Ratkaisujen määrää arvioidessa täytyy ensin määritellä mikä rajaa kaksi ratkaisua eri ratkaisuiksi, antaako koko laatikon pyöryttäminen esimerkiksi 90 astetta uuden ratkaisun? Tiukasti rajattuna erilaisia ratkaisuja on 536 (tai 268, mikäli paloja yhdistetään), löyhimmillään 17152. Ratkaisujen määrän lisäksi kiinnostavaa on ratkaisujen esittäminen, miten esittää kaikki eri ratkaisut systemaattisesti. Seuraavassa osiossa määritellään kahden ratkaisun välinen siirto, siis miten



Kuva 1: Ostomakhion. Kuvaan on merkitty palojen koordinaatit 12×12 -ruudukossa, sekä yksittäisten palojen pinta-alat.

yhdestä ratkaisusta voidaan siirtyä pienellä muutoksella seuraavaan. Myöhemmin tutkielmassa näytetään, että jos ratkaisuihin muodostetaan graafi, jossa eri ratkaisut esiintyvät solmuina, ja ratkaisujen välissä siltoina on tällaiset siirrot, voidaan lähes kaikki ratkaisut esittää Hamiltonin polkuna. 536 ratkaisusta 4 on saavutettavissa vain toisistaan käsin, ja jää näin polun ulkopuolelle.

3 Kombinatoriikkaa

Tässä luvussa käsitellään aluksi tutkielmassa tarvittavia kombinatoriikan peruskäsitteitä. Tämän jälkeen pureudutaan Ostomakhionin itsensä kombinatoriikkaan.

3.1 Kombinatoriikan perusteita

Joukko on alkioden muodostama kokonaisuus. Joukkoa jonka alkiotkin ovat joukkoja voidaan kutsua myös perheeksi.

Määritelmä 3.1. Olkoon A joukko ja olkoon \mathcal{B} perhe. Tällöin

- Perhe \mathcal{B} on joukon A *peite*, mikäli on voimassa $\bigcup \mathcal{B} = A$
- Perhe \mathcal{B} on *erillinen*, jos kaikki \mathcal{B} :n eri joukot ovat erillisiä.
- Perhe \mathcal{B} on A :n *ositus*, mikäli \mathcal{B} on epätyhjiä joukoista koostuva A :n erillinen peite.[5, s.24]

Ositusta, jonka alkiot on nimetty ja järjestetty kutsutaan *indeksöidyksi ositukseksi*.

Määritelmä 3.2. Joukkojen X ja Y *karteesinen tulo* $X \times Y$ on kaikkien sellaisten parien (x, y) muodostama joukko, joille pätee $x \in X$ ja $y \in Y$. Kolmen joukon karteesinen tulo antaa vastaavalla tavalla kolmikoiden joukon. Karteesisen tulon voi yleistää n joukon välille seuraavasti:

$$X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\},$$

missä X_1, \dots, X_n ovat joukkoja.

Karteesisen tulon alkioden lukumäärä saadaan kertomalla sen tekijöiden alkioden lukumäärät keskenään, eli

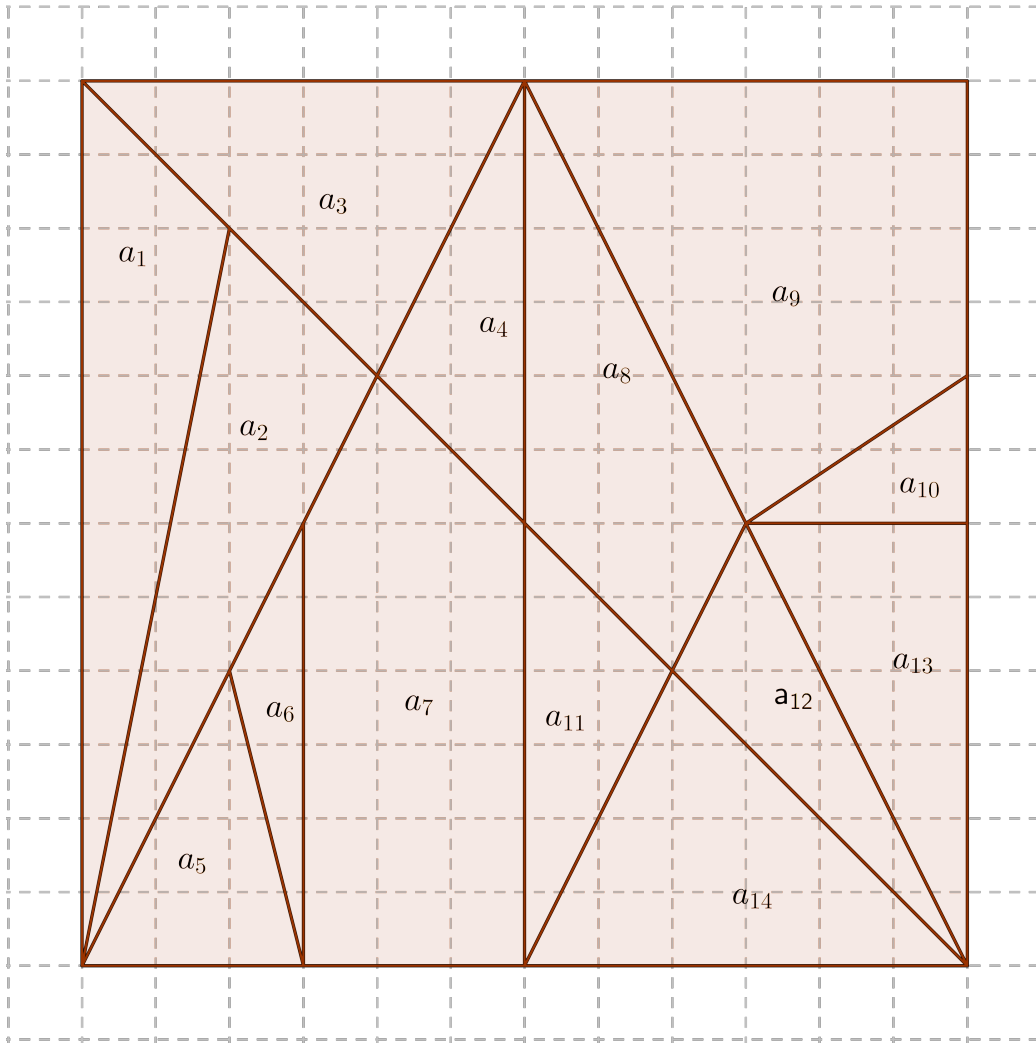
$$|X_1 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot \dots \cdot |X_n|.$$

Tätä kutsutaan tuloperiaatteeksi.

3.2 Ostomakhionin kombinatoriikkaa

Määritellään aluksi säännöt Ostomakhionin ratkaisuun. Olkoon E kuvan 2 Ostomakhionin ratkaisu. Ratkaisu on sama kuin kuvassa 1. Käyttäen tätä ratkaisua lähtökohtana, voidaan antaa määritelmä mille tahansa Ostomakhionin ratkaisulle.

Määritelmä 3.3. Olkoon F ratkaisun E ulkoreunojen muodostama neliö. A on Ostomakhionin *ratkaisu*, jos A on F :n indeksöity ositus $(q_1, q_2, \dots, q_{14})$, missä pala q_i on yhtenevä ratkaisun E palan a_i kanssa. Yksittäisiä paloja saa siis peilata, kiertää ja liikuttaa. Sovitaan, että A ja B ovat *eriävät* ratkaisut, mikäli $A \neq B$. A ja B ovat *eri* ratkaisut, mikäli A :ta ei voi muodostaa B :stä millään seuraavien toimenpiteiden yhdistelmällä: kiertämällä, peilaamalla, tai vaihtamalla keskenään yhtenevien palojen paikkoja, ts. A ei ole B :n kuva millään yhteneväisyyskuvauksella. Jos ratkaisut eivät ole erit, ovat ne *samat*.



Kuva 2: Eräs Ostomakhionin ratkaisu. Kuvassa kukin Ostomakhionin pala on nimetty.

Jatkossa palojen nimiä ei yleensä merkitä kuviin. Tarvittaessa yksittäisiin paloihin voidaan viitata, jolloin käytetään kuvan 2 asettamia nimiä. Myöhemmin tutkielmassa viitataan erilaisiin osituksiin kutsumalla näitä ositetun kuvion nimellä. Koko Ostomakhionia siis voidaan kutsua neliöksi, ja esimerkiksi kuvassa 2 esiintyvää ositusta (a_5, a_6) suorakulmaiseksi kolmioksi.

Määritelmä 3.4. *Siirto* on jonkin ratkaisun osa-alueen sellainen kierto tai peilaus, joka johtaa uuteen ratkaisuun. Tässä osa-alueella tarkoitetaan jotain sellaista yhtenäistä ositusta, joka on Ostomakhionin ratkaisun osajoukko. Osa-alue siis koostuu vierekkäisistä paloista ja voi olla koko neliö tai jokin osa sitä.

Kun tunnetaan ainakin yksi ratkaisu Ostomakhionille, voidaan eriävät (mutta samat) ratkaisut johtaa helposti. Olkoon A jokin Ostomakhionin rat-

kaisu. Tällöin koko A :n peilaus A_p on selvästi eriävä ratkaisu, sillä jokainen Ostomakhionin pala on epäsymmetrinen peilauksen ja kierron suhteen. Tällöin myös A_{k_n} , A :n kierto $\frac{n\pi}{2}$ verran on A :sta eriävä ratkaisu, kun $n = 1, 2, 3$. Jokaisen kierretyn ratkaisun voi peilata, jolloin saadaan jälleen yksi ratkaisu lisää. Oletetaan, että $A_p \neq A_{k_n}$. Tällöin mielivaltaisesta ratkaisusta voidaan johtaa 8 keskenään eriävää ratkaisua.

Ostomakhion sisältää myös kaksi paria keskenään yhteneviä paloja, siis parit $\{a_3, a_{14}\}$, sekä $\{a_4, a_{11}\}$. Mielivaltaiselle ratkaisulle A saadaan eriävä ratkaisu vaihtamalla kaksi sen sisältämistä yhtenevistä paloista keskenään. Koska pareja on kaksi, saadaan eriäviä ratkaisuja tällä tavoin johdettua neljä kappaletta yhdestä ratkaisusta. Oletetaan näin johdetut ratkaisut eriäviksi peilaamalla tai kiertämällä johdetuista ratkaisuista. Merkitään toista tällaisella siirrolla johdettua ratkaisua A^Δ ja toista A^∇ . Tällöin mainitut neljä eriävää ratkaisua ovat $A, A^\Delta, A^\nabla, A^{\Delta\nabla}$.

Olkoot $K = \{0, 1, 2, 3\}$, $P = \{0, 1\}$, $\Delta = \{0, 1\}$, $\nabla = \{0, 1\}$ joukkoja. Jos A on jokin Ostomakhionin ratkaisu, niin karteesinen tulo $\{A\} \times K \times P \times \Delta \times \nabla$ antaa kaikki ylläolevin menetelmin A :sta johdetut eriävät ratkaisut viisikkoina, joiden ensimmäinen alkio kertoo pohjana olleen ratkaisun, toinen alkio montako kertaa ratkaisua on kierretty, kolmas onko ratkaisua peilattu, sekä neljäs ja viides onko ratkaisun sisältämiä yhteneviä paloja vaihdettu keskenään. Karteesisen tulon alkioden lukumäärä saadaan kertomalla sen tekijöiden alkioden lukumäärät keskenään, siis

$$|\{A\} \times K \times P \times \Delta \times \nabla| = |\{A\}| \cdot |K| \cdot |P| \cdot |\Delta| \cdot |\nabla| = 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Toisin sanoen, kun yllä esitellyt menetelmät yhdistetään, voidaan mielivaltaisesta ratkaisusta johtaa 32 keskenään eriävää samaa ratkaisua. Sillä missä järjestyksessä operaatiot suoritetaan, ei ole lopputulokseen nähden väliä, esimerkiksi A_{k_1} :n peilikuva on sama ratkaisu kuin A_p :n kierto $\frac{\pi}{2}$ verran jokaiselle ratkaisulle A .

Koska Ostomakhion koostuu lähes yksinomaan keskenään erilaisista paloista, on selvää, ettei yksikään ratkaisu ole peilauksen tai kierron suhteen symmetrinen, eli jonkin ratkaisun jokainen peilaus ja kierto on värittämättömilläänkin paloilla eriävä. Toisaalta, jokainen Ostomakhionin pala on muodoltaan sellainen, ettei niitä voi peilata ja kiertää samaan asentoon. Tästä seuraa, että jokaisen ratkaisun A peilikuva A_p on välttämättä eriävä kyseisen ratkaisun kaikkien kiertojen A_{k_n} kanssa. Selvästi myöskään yhtenevien palojen vaihdolla johdettua ratkaisua ei voida saavuttaa peilaamalla tai kiertämällä samasta ratkaisusta käsin, jolloin aiemmin esitetty oletukset eriävyyksistä ovat perusteltuja.

Jos A ja B ovat eri ratkaisut, on selvää, että jokainen A :sta johdettu eriävä (mutta sama) ratkaisu A' on eri ratkaisu kuin B eri ratkaisun määritelmän nojalla. Jos nimittäin olisi toisin, voisi B :stä päästä kiertämällä, peilaamalla tai vaihtamalla yhteneviä paloja keskenään ratkaisuun A' , josta edelleen

pääsisi mainituilla menetelmillä ratkaisuun A , eikä A ja B silloin olisi eri ratkaisuja. Tästä johtuen, mikäli jokainen Ostomakhionin eri ratkaisu löydetään, voidaan kaikkien ratkaisujen määrä päätellä kaikkien eri ratkaisujen määrästä.

Lause 3.1. *Olkoon \mathcal{A} kaikkien ratkaisujen joukko, ja \mathcal{B} kaikkien eri ratkaisujen joukko. Tällöin kaikkien ratkaisujen lukumäärä $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| \cdot 32$.*

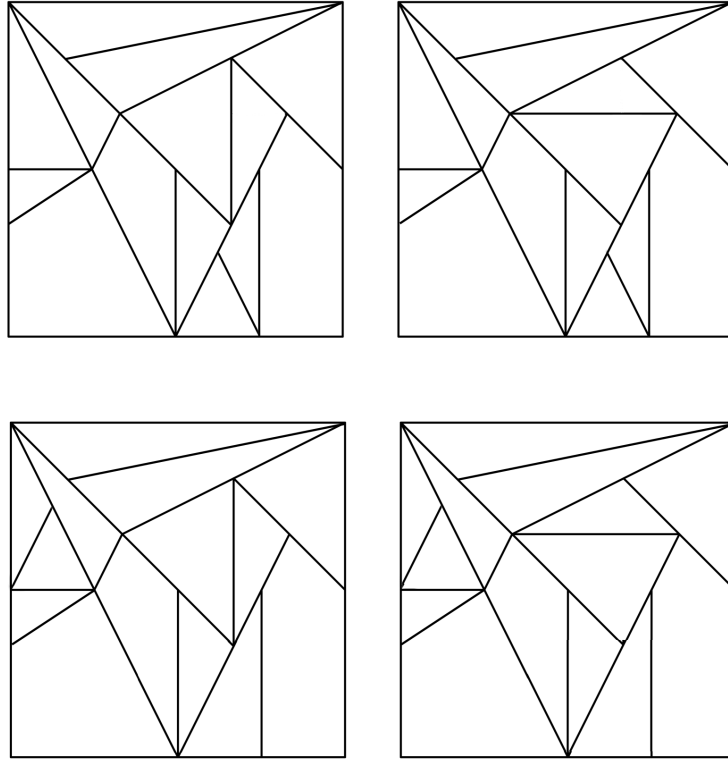
Todistus. Lause perustuu edellisen kappaleen päättelyyn. \square

3.3 Ostomakhionin eri ratkaisut

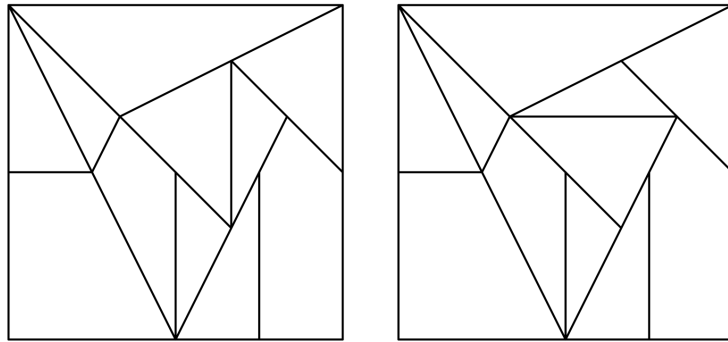
Ostomakhioniin on yhteensä 536 eri ratkaisua. Suurin osa ratkaisuista voidaan löytää löytämällä yksi sopiva ratkaisu, ja etenemällä aiemmin määritellyillä siirroilla kunnes kaikki vaihtoehdot on käyty läpi. Ratkaisut voidaan jakaa kahteen luokkaan näiden siirtojen suhteen, suurempaan luokkaan kuuluu 532 ratkaisusta, joista jokaisesta pääsee mielivaltaiseen toiseen riittävän monella siirrolla. Pienempi luokka sisältää vain kuvassa 3 esitetyt 4 ratkaisua, joista pääsee toisiinsa tällaisella siirrolla. Tutkielman myöhemmässä osiossa esitellään Ostomakhionin ratkaisuja graafien avulla. Kun kaikki (eri) ratkaisut laitetaan yhteen graafiin, ovat mainitut kaksi eri luokkaa graafin eri komponentteja.

Kun kaikki 536 ratkaisua on löydetty, on ne helpohko osoittaa eri ratkaisuksi tietokoneavusteisesti. Kaikista ratkaisuista voidaan valita mielivaltaiset kaksi ratkaisua $\frac{536-535}{2} = 143380$ eri tavalla. Nämä parit voidaan käydä yksittäin läpi ja todeta eri ratkaisuksiksi. Vaikeampaa on osoittaa, että enempää ratkaisuja ei ole. Käytännössä tämä osoitetaan etsimällä kaikki ratkaisut järjestelmällisesti sopivalla tietokoneohjelmalla, siis täyttämällä neliötä paloilla eri järjestyksissä niin pitkään, että kaikki mahdolliset ratkaisutavat on käyty läpi. Esimerkkiohjelma voisi valita yhden palan, asettaa sen vasempaan ylänurkkaan sivu vasenta reunaa vasten, ja valita sopivia paloja siten että ylänurkan suorakulma saadaan täytettyä. Tämän jälkeen voidaan jatkaa yläreunaa oikealle täyttämällä oikokulma ja niin edelleen. Tällä saa lopulta luotua kaikkien ratkaisujen joukon, josta voidaan luokitella samat ratkaisut tässäkin tutkielmassa esitetyllä tavalla, jolloin kaikkien ratkaisujen lukumäärä saadaan jaettua 32:lla ja päästään lukuun 536.

Ostomakhionissa on kolme sellaista palaparia $(\{a_1, a_2\}, \{a_5, a_6\}, \{a_9, a_{10}\})$, joille pätee, että parin paloilla on yhteinen sivu jokaisessa ratkaisussa. Tämä voidaan osoittaa käymällä kaikki ratkaisut läpi. Koska palat esiintyvät joka ratkaisussa yhdessä, on mielekästä yhdistää kukin palapareista yhdeksi palaksi. Ratkaisumallit pysyvät yhdistämisen jälkeen samana, mutta palat a_5 ja a_6 yhdistämällä syntyvä suorakulmainen kolmio on yhtenevä palan a_{13} kanssa. Tästä johtuen, jos palaparit yhdistää, vähenee eri ratkaisujen määrä puoleen, kun näiden kahden kolmion keskenään vaihtamista ei enää lasketa eri ratkaisuksi (vertaa kuvia 3 ja 4).



Kuva 3: Ostomakhionin erikoisratkaisut.



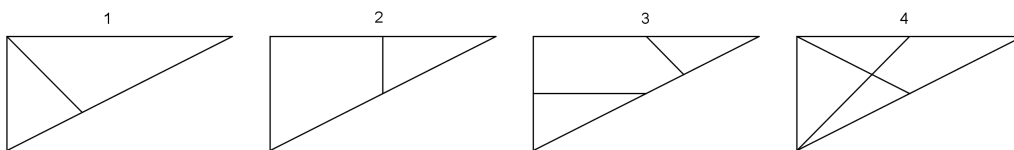
Kuva 4: Ostomakhionin erikoisratkaisut pelin supistetussa versiossa.

3.4 Ratkaisujen järjestelmällinen esittäminen

Aiemmin tässä tutkielmassa on esitetty ratkaisujen kokonaismäärä, sekä kerrottu suurimman osan ratkaisuista olevan tavoitettavissa toisistaan käyttämällä määriteltyjä siirtoja. Tässä osiossa pureudutaan eri ratkaisujen järjestelmällisempään esittämiseen. Käsittelyn helpottamiseksi aiemmin esitetyt kolme palaparia yhdistetään kolmeksi palaksi. Ratkaisu määritellään

vastaavasti kuin aiemmin, mutta määritelmää muutetaan vastaamaan vähentynyttä palamäärää

Määritelmä 3.5. Olkoon Ostomakhionin sivu 12. Tällöin se voidaan jakaa neljään yhtä suureen suorakulmaiseen kolmioon, jonka kateettien pituudet ovat 6 ja 12. Tällaisen suorakulmaisen kolmion ositusta, jonka osat ovat yhteneviä Ostomakhionin osien kanssa kutsutaan *ydinkolmioksi*. Erityisen kiinnostuksen kohteena ovat kuvassa 5 esitellyt ydinkolmiot. Näitä kolmioita kiertämällä ja peilaamalla voidaan luoda yhteensä 24 eri *ydinratkaisua*, jotka muodostavat Ostomakhionin *ytimen*.

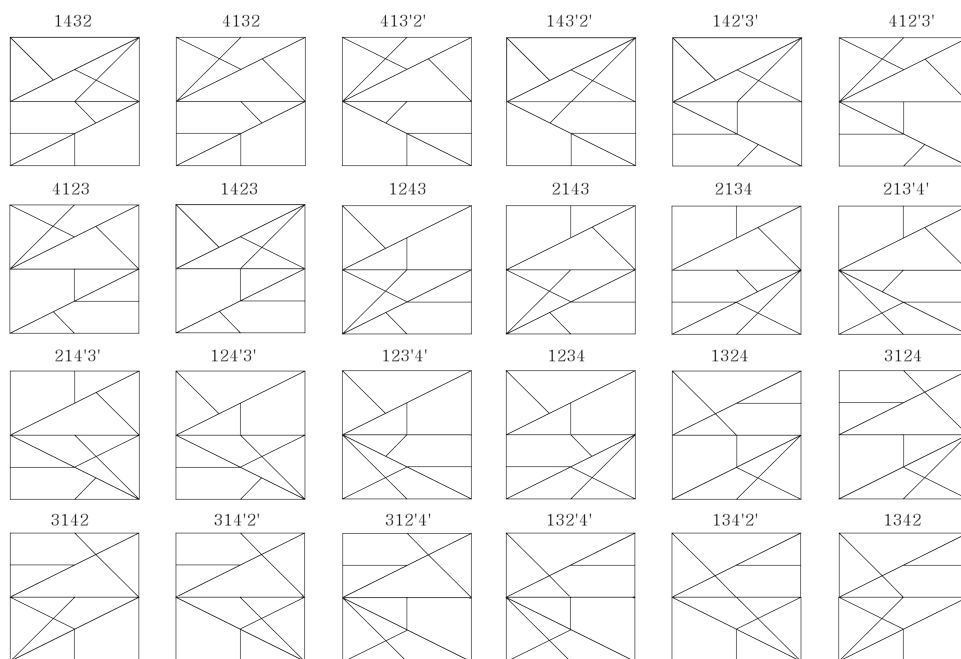


Kuva 5: Neljä ydinkolmiota.

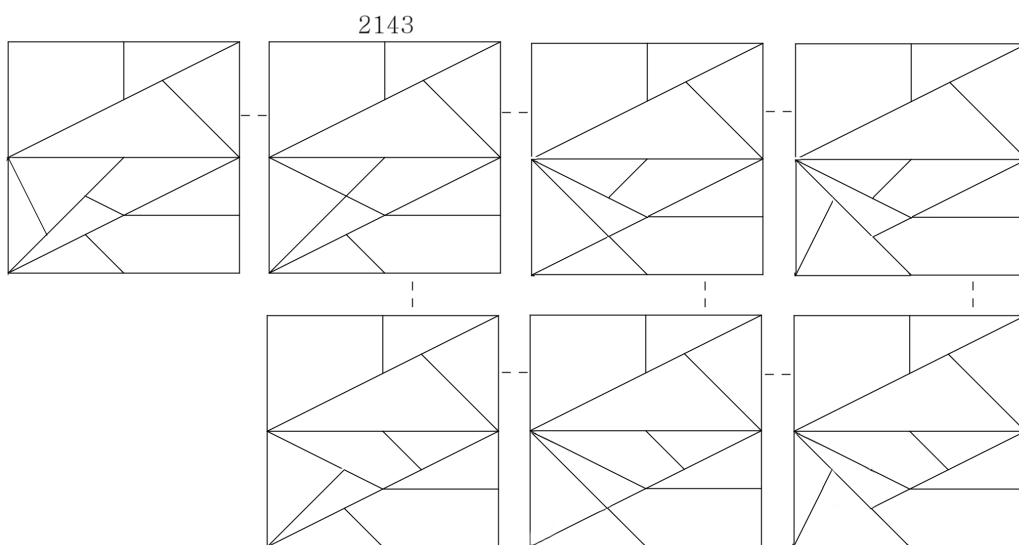
Loput ratkaisuista (lukuunottamatta aiemmin esitellyjä kahta erikoistapausta) ryhmitellään ydinratkaisujen ympärille perheiksi. Ydinratkaisusta toiseen päästään peilaamalla tai kiertämällä sopivaa ydinkolmiota. Ydinratkaisusta oman perheensä muihin ratkaisuihin päästään kiertämällä tai peilaamalla ratkaisun pienempiä osia, yleensä yhden ydinkolmion sisällä. Perheen sisällä olevissa siirroissa liikkuvat osat ovat kaikki suorakulmioita, suunnikkaita, tai tasakylkisiä kolmioita tai puolisuunnikkaita. Jatkossa kutsutaan ydinratkaisun A virittämää perhettä ydinperheeksi \mathcal{P}_A .

Kuvassa 6 esitellään kaikki 24 ydinratkaisua. Ratkaisut on järjestetty siten, että kun niitä seuraa lukusuunnan mukaisesti, voi jokaisesta ratkaisusta hypätä seuraavaan yhdellä siirrolla. Kuvat on numeroitu neljän ydinkolmion mukaan siten, että ensimmäinen numero on ensimmäinen vastaantuleva kolmio ylhäältä alaspäin lukiessa ja niin edelleen. Pilkku numeron perässä tarkoittaa, että kyseinen kolmio on peilattu. Ydinratkaisuissa kolmio 1 on aina ylemmässä puoliskossa ja peilaamaton, tällä vältetään eriävät samat ratkaisut.

Ydinkolmion 4 voi jokaisessa ydinratkaisussa muuntaa peilaamalla siinä esiintyviä kolmea tasakylkistä kolmiota. Koska kaksi mainituista kolmioista ei ole päällekkäin, saadaan neljäs muunnos peilaamalla kummatkin näistä kolmioista. Täten jokaisen ydinratkaisun voi muuntaa vähintään neljäksi muuksi ratkaisuksi ja jokaisessa perheessä on siis ratkaisuja oltava vähintään viisi. Enimmillään yksittäisessä ydinperheessä on 18 eri ratkaisua. Osa ratkaisuista rikkoo ydinkolmioita, kuten kuvassa 7 näkyvät oikean reunan ratkaisut.



Kuva 6: Ydinratkaisut



Kuva 7: Ydinratkaisun 2143 määrittämä ydinperhe \mathcal{P}_{2143} . Katkoviiva merkitsee siirtoa ratkaisujen välillä.

4 Graafiteoriaa

Tässä luvussa paneudutaan tutkimaan Ostomakhionia graafien kautta. Aluksi määritellään graafiteorian peruskäsitteitä, ja sitten sovelletaan näitä Os-

tomakhioniin.

4.1 Graafiteorian perusteita

Määritelmä 4.1. *Yksinkertainen graafi*, eli verkko G , on järjestetty pari (V, E) , missä $V \neq \emptyset$ on äärellinen joukko ja E on äärellinen joukko järjestämättömiä pareja $\{u, v\}$, missä $u, v \in V$ ja $u \neq v$. Joukon V alkioita sanotaan *solmuiksi*, ja joukon E alkioita *särmiksi*.

Määritelmä 4.2. *Multigraafi* on yksinkertaisen graafin yleistys, jossa kahden eri solmun välillä voi olla useita (äärellinen määrä) eri särmiä. *Painotettu graafi* on graafin yleistys, jossa jokaiseen särmään on liitetty jokin luku. Tätä lukua sanotaan särmän *painoksi*. [6, s.1-4]

Graafi on siis kokoelma solmuja, ja niiden välillä olevia särmiä. Graafin G aligraafiksi kutsutaan graafia G' , jolle pätee, että jos $G = (V, E)$ ja $G' = (V', E')$ niin $V' \subseteq V$ ja $E' \subseteq E$. Graafin *koko* on sen sisältämien solmujen määrä ja solmun *aste* on siihen johtavien särmien määrä.

Ostomakhionin tapauksessa tuntuu intuitiiviselta määritellä solmut Ostomakhionin ratkaisuihin. Tällöin täytyy ottaa kantaa kysymykseen, jos \mathcal{A} on kaikkien ratkaisujen joukko ja \mathcal{B} on kaikkien eri ratkaisujen joukko, onko $V = \mathcal{A}$, vai $V = \mathcal{B}$. Tämän osion aluksi käsitellään jälkimmäistä tapausta, tarkemmin ottaen supistetun 11 palan Ostomakhionin eri ratkaisuja. Lisäksi joukosta \mathcal{B} jätetään tässä vaiheessa pois aiemmin esiteltyt kaksi erikoistapausta. Osion lopuksi laajennetaan tarkastelua ensin koko Ostomakhionin eri ratkaisuihin, ja sitten kaikkiin ratkaisuihin \mathcal{A} .

Kuva 7 on itsessään yksinkertainen graafi, siinä $V = \mathcal{P}_{2143}$ on ydinratkaisun 2143 virittämä ydinperhe, jokainen solmu on kuva itsestään, ja särmät katkoviivoilla merkittyjä.

Määritelmä 4.3. *Polku* graafin G solmusta u solmuun v on äärellinen jono

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_m, v_m = v,$$

jossa v_0, v_1, \dots, v_m ovat solmuja ja e_1, e_2, \dots, e_m niiden välillä olevia särmiä. Tälle polulle voidaan käyttää merkintää $p : u \rightarrow v$. Koska särmien päätesolmut ovat yksikäsitteiset, polku voidaan antaa myös pelkkänä särmäjonona. Yksinkertaisessa graafissa voidaan antaa myös pelkkä solmujono. Polun *pituus* on sen särmien lukumäärä, määritelmän jonon pituus on siis m . Painotetun polun pituus on polun särmien painojen summa.

Määritelmä 4.4. Polku on *piiri*, jos sen alkuperä- ja loppusolmut ovat samat ja siinä on vähintään yksi särmä. *Yksinkertaisessa* polussa tai piirissä kukin särmä esiintyy korkeintaan kerran. Polkua sanotaan *suoraksi* jos mikään solmu ei esiinny siinä kahdesti. *Silmukka* on yksinkertainen piiri, jossa ainoastaan päätesolmu esiintyy kahdesti. [6, s. 24-25]

Jatkossa kun sanotaan, että piirissä ei esiinny sama solmu kahdesti, tarkoitetaan, että vain päätesolmu voi esiintyä kahdesti.

Kahden solmun sanotaan olevan yhdistetyt jos niiden välillä on polku. Tämän pohjalta määritellään graafin yhtenäisyys. Graafi on siis yhtenäinen, jos mitkä tahansa kaksi sen solmuista ovat yhdistetyt. Yhtenäisyyden kautta määritellään komponentti seuraavasti:

Määritelmä 4.5. Graafin maksimaalinen yhtenäinen aligraafi on graafin *komponentti*.

Tässä maksimaalinen tarkoittaa aliverkkorelaation suhteen mahdollisimman suurta, komponentissa on siis mukana kaikki solmut ja särmät joihin jostakin sen solmuista on polku. Yhtenäisellä graafilla on aina vain yksi komponentti, ja epäyhtenäisellä graafilla on aina enemmän kuin yksi komponentti. Joskus halutaan tietää, kuinka herkästi graafi muuttuu epäyhtenäiseksi. Jos yhtenäisestä graafista tulee epäyhtenäinen yhden solmun poistamalla, on graafi separoituva, ja tätä solmua kutsutaan irrotussolmuksi.[6, s.34, 37]

Määritelmä 4.6. Suoraa polkua, joka käy läpi kaikki graafin solmut, sanotaan *Hamiltonin poluksi*. Vastaavasti silmukka, joka käy läpi graafin kaikki solmut on *Hamiltonin silmukka*. Graafia, joka sisältää Hamiltonin silmukan kutsutaan *Hamiltonin graafiksi*.

Jos graafi on Hamiltonin graafi, on selvää, että sen täytyy olla myös yhtenäinen. Edelleen, jos Hamiltonin graafi sisältää vähintään kolme solmua, ei siinä voi myöskään olla irroitussolmua. Hamiltonin polulle ehdot ovat väljemmät, irroitussolmu ei vielä tarkoita, ettei graafi voisi sisältää Hamiltonin polkua. [6, s.87]

Määritelmä 4.7. Olkoot $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ yksinkertaisia graafeja. Graafeja G_1 ja G_2 sanotaan *isomorfeisiksi*, jos on olemassa sellainen kuvaus $f : V_1 \rightarrow V_2$, että f on bijektio, ja f säilyttää solmujen vierekkyyden, ts. solmujen u ja v välillä on särmä, kun $u, v \in V_1$, täsmälleen silloin kun solmujen $f(u)$ ja $f(v)$ välillä on särmä.[6, s.22]

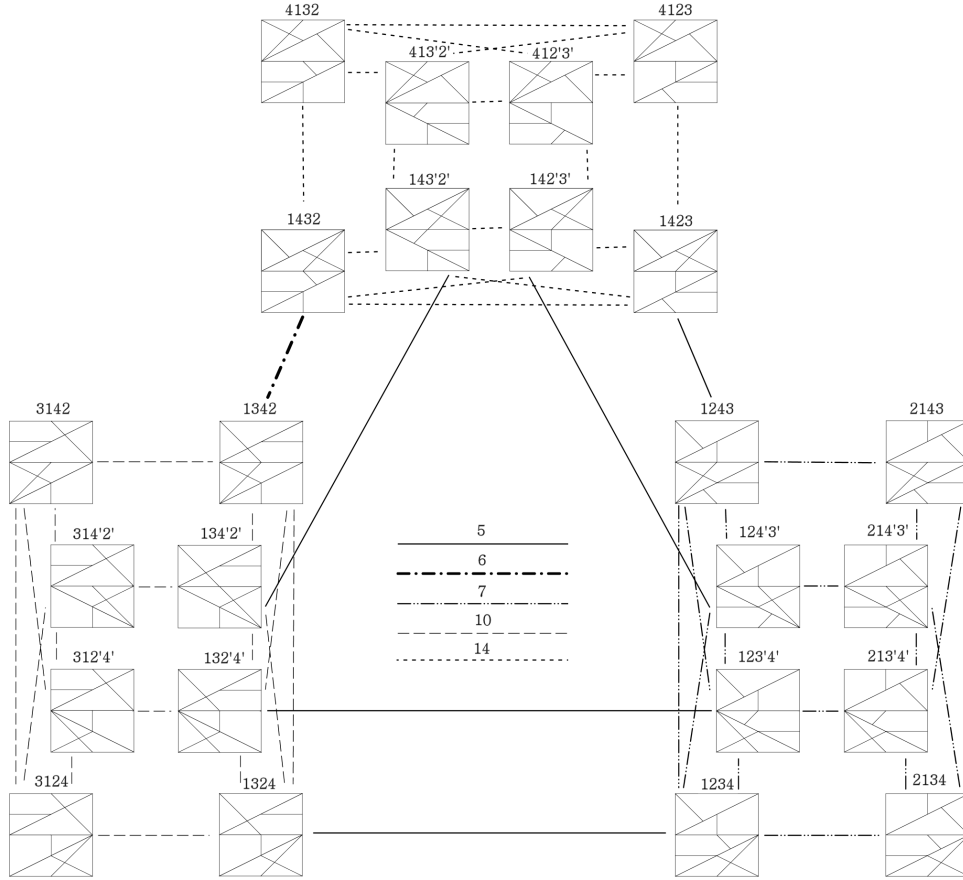
4.2 Ostomakhion graafeina

Tässä alaluvussa sovelletaan edellä esiteltyjä graafiteorian määritelmiä Ostomakhioniin ja sen ratkaisuihin. Erityisesti tämän luvun päälähteenä toimii Grahamin ja Chungin sivusto Ostomakhionista.[1]

Olkoon G_O graafi, jossa on kuvattu Ostomakhionin supistetun muodon kaikki eri ratkaisut. G_O koostuu kahdesta komponentista, sillä erikoisratkaisuihin ei pääse millään siirroilla muihin ratkaisuihin. Jatkossa erikoisratkaisujen komponenttia kutsutaan *pikkukomponentiksi*, ja muiden ratkaisujen komponenttia *suureksi komponentiksi*. Samoja nimiä käytetään puhuttaessa

Ostomakhionin supistetusta muodosta, kaikista ratkaisuksista, ja eri ratkaisuksista. Tässä ei ole ongelmaa, sillä tilanteissa puhutaan eri graafeista.

Kuten edellisessä osiossa todettiin, voi jokaisen ydinratkaisun muuntaa vähintään neljäksi muuksi ratkaisuksi muuntamalla ydinkolmiota 4. Koska ratkaisuille tehty muunnokset ovat samat, niin jos ydinratkaisujen A ja B välillä on siirto, on myös ydinperheiden \mathcal{P}_A ja \mathcal{P}_B välillä aina vähintään viisi särmää, siis perheen \mathcal{P}_A ratkaisusta vähintään viidestä on siirto johonkin perheen \mathcal{P}_B ratkaisuun. Enimmillään kahden ydinperheen välillä on 14 särmää. Jatkossa, jos kahden ydinperheen välillä on siirtoja, kutsutaan näitä *naapuriperheiksi*.



Kuva 8: Ostomakhionin ydinperheet ja niiden väliset siirrot painotettuna graafina. Särmän paino kuvaa, montako siirtoa on perheiden välillä

Olkoon graafi G_K kuvassa 8 esiintyvä graafi. Graafissa on esitelty Ostomakhionin suuri komponentti pelkistettynä painotettuna graafina. Graafin solmut ovat ydinperheitä, ja niitä kuvaamassa on virittävä ydinratkaisu. Selvästi G_K ei ole graafin G_O suuri komponentti, sillä sen koko on vain 24.

Koko graafia $G_{\mathcal{O}}$ (tai sen suurta komponenttia) ei kuitenkaan pysty selkeästi esittämään näin pienessä tilassa, ja kuvan pelkistys antaa tätä tutkielmaa varten riittävän tarkkuuden. Graafista on helppo erottaa kolme aligraafia, siten, että kunkin aligraafin sisällä särmien painot pysyvät samana. Olkoot nämä aligraafit G_{K7} , G_{K10} , sekä G_{K14} painojensa mukaan.

Lähes kaikki aligraafista toiseen kulkevat särmät ovat painoltaan viisi, joskin tästä poikkeuksena on ydinperheiden \mathcal{P}_{1432} ja \mathcal{P}_{1342} välinen särmä. Kolmea poikkeusta lukuun ottamatta kunkin aligraafin mielivaltaisessa perheessä on yhtä monta ratkaisua, kuin aligraafin särmien paino on. Poikkeukset tähän ovat ydinperheet \mathcal{P}_{1432} , \mathcal{P}_{1342} ja $\mathcal{P}_{134'2'}$ joiden perheet sisältävät 18, 16 ja 18 ratkaisua. Havainnon pohjalta voidaan muodostaa seuraava lause:

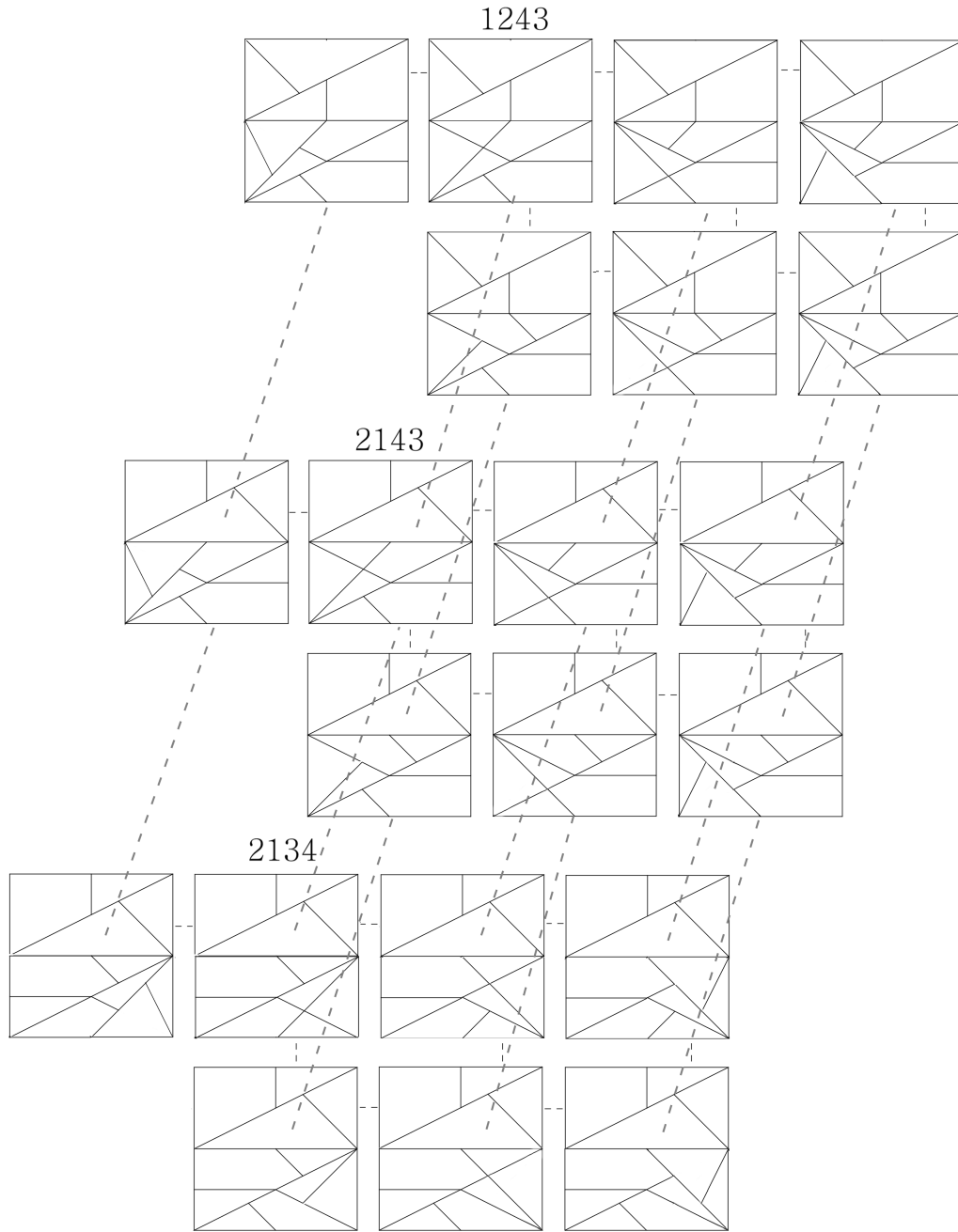
Lause 4.1. *Olkoot A ja B ydinratkaisuja samassa aligraafissa G_{K_i} . Jos ratkaisujen A ja B välillä on ainakin yksi siirto, ja $A, B \notin \{1432, 1342, 134'2'\}$, niin on olemassa bijektio $f : \mathcal{P}_A \rightarrow \mathcal{P}_B$, joka kuvaa yksittäisen ratkaisun yhden siirron päässä olevaan naapuriperheen ratkaisuun.*

Syy lauseen ilmiölle on intuitiivinen: aligraafin kukin perhe on muodostettu tekemällä samat siirrot ydinratkaisusta perheen muihin ratkaisuihin. Yksittäisestä ratkaisusta on siirto niihin naapuriperheiden ratkaisuihin, joille on tehty samat siirrot. Tätä havainnollistaa kuva 9, joka kuvaa kolmea perhettä aligraafissa G_{K7} .

Kunkin aligraafin G_{K_i} sisällä olevien perheiden graafit ovat siis keskenään isomorfisia, lukuunottamatta aiemmin mainittua kolmea erikoistapausta. Näin voidaan erotella Ostomakhionin suuren komponentin perheistä kuusi perhetyyppiä, missä kunkin tyyppin sisällä perheiden graafit ovat isomorfisia, ja kolmen tyyppin sisällä on kussakin vain yksi perhe.

Kuvasta 9 katsoen on selvää, että ainakaan kaikkien ydinperheiden sisältä ei ole mahdollista löytää Hamiltonin silmukkaa, sillä kuvan perheiden ydinratkaisut toimivat itse pudotussolmuina. Toisaalta, jokaiseen kuvassa esiintyvän yksittäisen perheen graafiin on mahdollista muodostaa Hamiltonin polku, mutta ei aloittaen ydinratkaisusta. Nämä kaksi väitettä on suoraan yleistettävissä aligraafille G_{K7} johtuen perheiden isomorfisuudesta. Aligraafeissa G_{K10} ja G_{K14} sen sijaan jokaisen yksittäisen perheen graafi on Hamiltonin graafi.

Myöskään koko kuvan 9 kolmen perheen aligraafi ei ole Hamiltonin graafi. Sen sijaan jos graafista poistettaisiin yksi perheistä, olisi kyseessä Hamiltonin graafi. Tähän ei anneta tässä todistusta, mutta reitti on suhteellisen helppo löytää valitsemalla sopiva Hamiltonin polku yhdessä ydinperheessä, ja kulkemalla sama polku toiseen suuntaan toisessa. Koska aligraafin G_{K7} jokainen perhe on keskenään isomorfinen, on selvää, että kyseisen aligraafin mikä tahansa kahden ydinperheen aligraafi on Hamiltonin graafi. Tästä on suhteellisen helposti osoitettavissa, että aligraafin sisällä myös neljän perheen aligraafi on Hamiltonin graafi, niin kauan kun perheistä on olemassa siirrot toisiinsa.



Kuva 9: Kolme ydinperhettä ja niiden väliset siirrot. Perheen sisällä on siirto yhteisen sivun jakavien ratkaisujen välillä. Kustakin ratkaisusta on siirto naapuri-perheen samalla sijainnilla olevaan ratkaisuun.

Lause 4.2. *Olkoon $G \subset G_{K7}$ sellainen neljän eri ydinperheen graafi, että jokainen perhe on naapuri jollekin toiselle perheistä. Tällöin G on Hamiltonin graafi.*

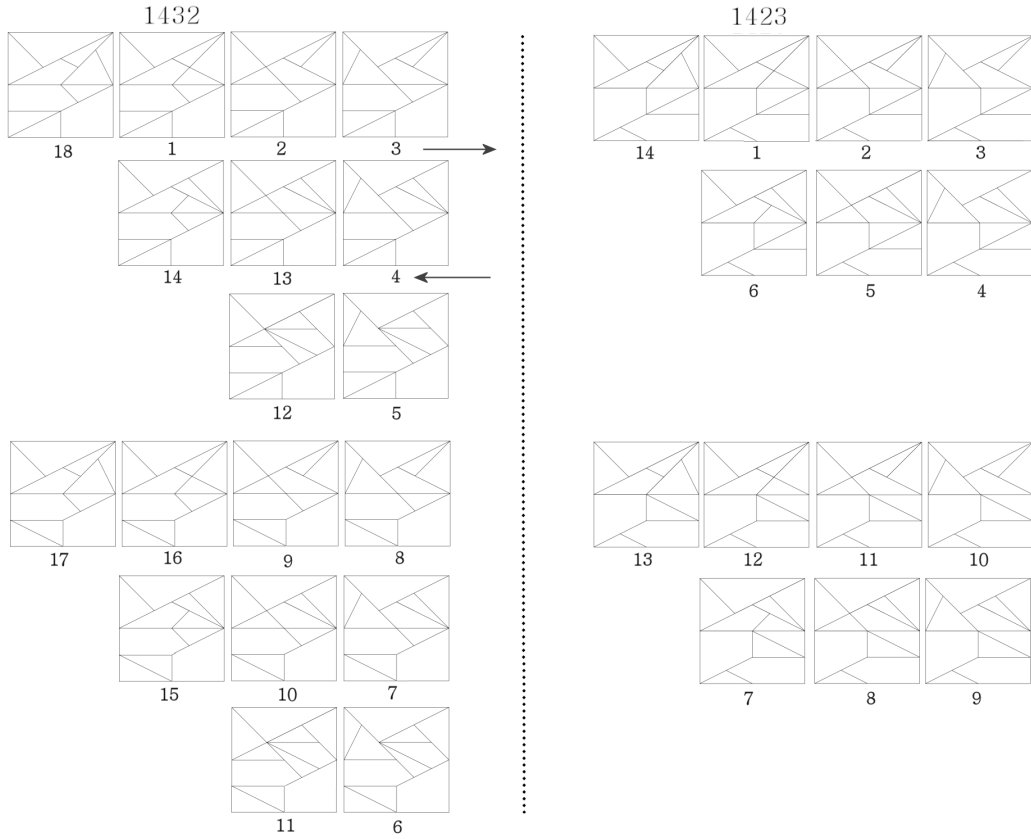
Todistus. Tiedetään, että kahden naapuriperheen aligraafi on Hamiltonin graafi. Toisaalta, jos graafista G_{K7} valitaan neljä ydinperhettä pyydetyllä tavalla, on jokainen naapuri vähintään kahdelle muulle perheistä. Jaetaan perheet kahdeksi pariiksi, ja kootaan näiden parien muodostamikke aligraafeille Hamiltonin silmukat samalla reitillä. Olkoon mainitut silmukat $(a_1, a_2, \dots, a_7, a_1)$ ja $(b_1, b_2, \dots, b_7, b_1)$, missä a_i ja b_i ovat samalla sijainnilla. Poistetaan silmukoiden särmäjonoista särmät $\{a_1, a_2\}$ ja $\{b_1, b_2\}$ ja asetetaan uudet särmät $\{a_1, b_1\}$ ja $\{a_2, b_2\}$. Näin on saatu Hamiltonin silmukka $(a_1, b_1, b_7, b_6, \dots, b_2, a_2, a_3, \dots, a_7, a_1)$. \square

Edellä olleen menetelmän voi yleistää. Olkoon $A = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ ja $B = (u_1, u_2, \dots, u_m, u_1)$ erillisiä silmukoita. Jos silmukasta A löytyy sellaiset solmut v_i ja v_{i+1} , joista on särmät joihinkin solmuihin u_j ja u_{j+1} , kun $i < n$ ja $j < m$, niin $(v_1, v_2, \dots, v_i, u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+1})$ on silmukka. Tässä huomionarvoista on, että silmukan alkusolmuksi voi valita minkä tahansa sen solmuista.

Näin voidaan todistaa, että koko aligraafi G_{K7} on Hamiltonin graafi yhdistämällä kaksi neljän perheen silmukkaa. Edelleen, koska aligraafien G_{K10} ja G_{K14} lähes jokainen ydinperhe muodostaa itsessään Hamiltonin graafin, ja useimpien perheiden jokaisesta ratkaisusta on siirto naapuriperheen ratkaisuun, voidaan vastaavaan tapaan osoittaa, että G_{K10} ja G_{K14} ovat molemmat Hamiltonin graafeja, ainakin jos niistä poistetaan ydinperheet $\mathcal{P}_{1432}, \mathcal{P}_{1342}$ ja $\mathcal{P}_{134'2'}$. Aiemmin jo todettiin, että jokaisen kahden naapuriperheen välillä on vähintään viisi siirtoa, ja koska siirrot ovat vierekkäisistä ratkaisuista, näyttää selvältä, että myös tässä poistetut perheet saadaan kytkettyä niitä sivuaviin laajempiin silmukoihin. Tämä on toisaalta helposti osoitettavissa myös kuvallisesti ja kuvallisen todistuksen etuna tähän tutkielmaan saadaan kuvat lopuistakin perhetyypeistä. Seuraavassa siis osoitetaan kuvallisesti aligraafien G_{K10} ja G_{K14} olevan kokonaisuudessaan Hamiltonin graafeja.

Kuten aiemmin on todettu, myös ydinperheet $\mathcal{P}_{1432}, \mathcal{P}_{1342}$ ja $\mathcal{P}_{134'2'}$ voidaan esittää Hamiltonin graafeina. Kuvissa 10, 11 ja 12 on esitelty nämä perheet, sekä kaksi niiden naapuriperheistä. Kuviin on kirjattu kunkin perheen sisälle koko perheen läpikäyvä silmukka, sekä merkitty sellaiset ratkaisut, joiden kohdalta silmukat voi halutessaan liittää yhdeksi suureksi silmukaksi. Ominaisuutta, jossa perheen jokaisessa ratkaisussa on jokin ositus, jota muuntamalla saadaan kaksinkertaistettua perheen ratkaisujen määrää kutsutaan jatkossa *kaksikerroksisuudeksi*.

Kuvaa on selkeytetty piirtämällä perheet kaksikerroksisiksi ja jättämällä särmät piirtämättä, jokaisesta ratkaisusta on siirto ratkaisuihin joilla on jaettu sivu, sekä saman perheen toisessa kerroksessa olevaan samalle paikalle piirrettyyn ratkaisuun. Lisäksi perheiden välillä on jokaisesta ratkaisusta siirto naapuriperheen samalle paikalle piirrettyyn ratkaisuun. Perheessä \mathcal{P}_{1432} on neljä ratkaisua joista ei ole siirtoa naapuriperheeseen. Molempiin perheisiin on numeroitu silmukka, joka käy läpi kaikki perheen ratkaisut.

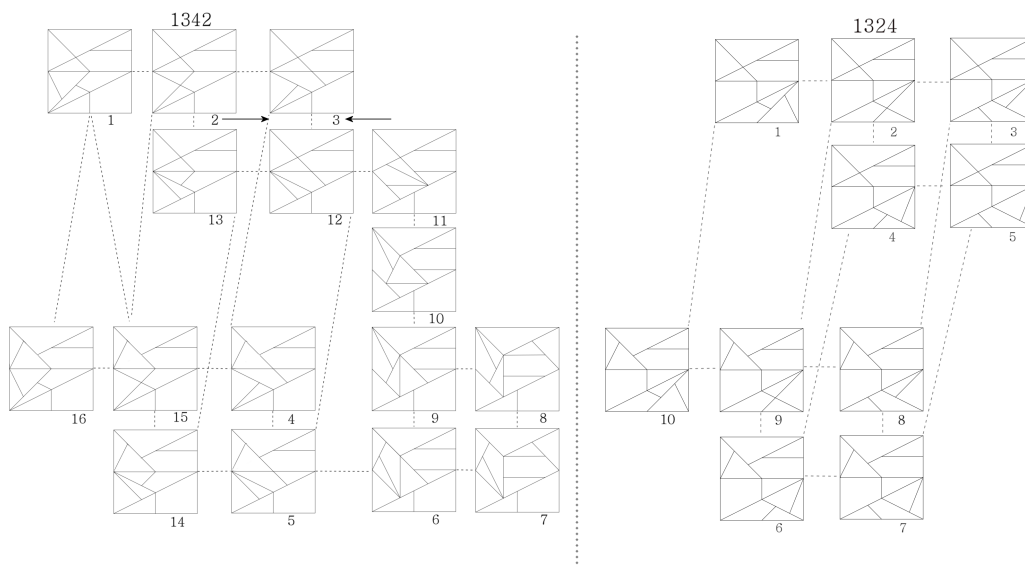


Kuva 10: Kaksi ydinperhettä ja Hamiltonin silmukka. Kuvassa vasemmalla on ydinperhe \mathcal{P}_{1432} ja oikealla ydinperhe \mathcal{P}_{1423} .

Nuolilla on merkitty eräs kohta, mistä silmukat voi yhdistää.

\mathcal{P}_{1432} on erikoistyyppisistä perheistä yksinkertaisin esitettävä, se on pitkälti samankaltainen kuin muut aligraafinsa perheistä, erona vain joissain ratkaisuista esiintyvä suunnikas, jonka peilaaminen antaa neljä ratkaisua lisää. Molemmissa perhetyypeissä huomattavana ominaisuutena on pieni suorakulmio, joka esiintyy jokaisessa ratkaisussa ja aiheuttaa graafien kaksikerroksisuuden. Yhtäläisyys aligraafin G_{K7} perhetyyppiin on ydinratkaisusta yhden siirron päässä esiintyvä suorakulmainen tasakylkinen kolmio, jonka kääntäminen tuo kumpaankin kerrokseen kaksi ratkaisua lisää perheen \mathcal{P}_{1423} edustamassa perheessä, ja neljä ratkaisua perheessä \mathcal{P}_{1432} .

Perhe \mathcal{P}_{1342} on aiemmin esiteltyjä perheitä vähemmän suoraviivainen tapaus. Sen ratkaisuihin esiintyy suunnikas ja kolme erilaista puolisuunnikasta, jotka erottavat sen aligraafinsa tyypillisestä perhetyyppistä. Perheen graafi on Ostomakhionissa hyvin epätyypillinen siinäkin mielessä, että sen eri ratkaisujen välillä on verrattain vähän siirtoja. Tämä tekee muunmuassa Hamiltonin silmukan löytämisen perheen sisältä hankalammaksi. Lukijalle tehtäväksi jää yrittää löytää jokin muu tällainen silmukka kuin kuvassa 11 esitelty. Perheen \mathcal{P}_{1324} edustama perhetyyppi taas on suhteellisen yksinkertainen. Aiem-



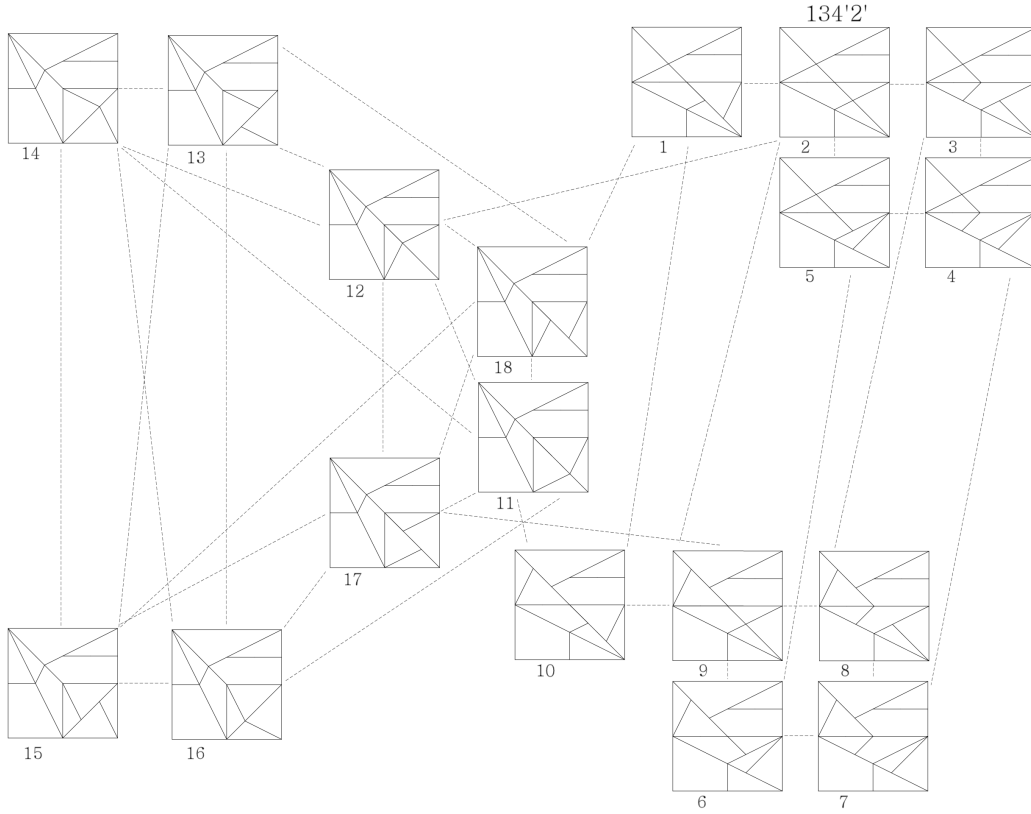
Kuva 11: Kaksi ydinperhettä ja Hamiltonin silmukka. Kuvassa vasemmalla on ydinperhe \mathcal{P}_{1342} ja oikealla ydinperhe \mathcal{P}_{1324} .

min esitellyissä perhetyypeissä esiintynyt suorakulmainen tasakylkinen kolmio esiintyy jokaisessa perhetyypin ratkaisussa ja aiheuttaa perheiden kaksoeroksisuuden.

Viimeiseksi tarkasteltavaksi on jätetty ydinperhe $\mathcal{P}_{134'2'}$. Kuvan rinnalle ei ole piirretty naapuriperhettä, mutta kuvassa esiintyvän silmukan kymmenestä ensimmäisestä ratkaisusta on jokaisesta siirto kaikkiin perheen naapuriperheisiin. Tässä voidaan siis pitää selvänä, että tämänkin perheen saa liitettyä osaksi aligraafinsa laajempaa silmukkaa.

Ydinperhe $\mathcal{P}_{134'2'}$ erottuu selkeästi kaikista muista perheistä graafiltaan ja sitä on vaikea esittää tiiviisti ja selkeästi. Neljässä perheen ratkaisuista voidaan peilata suorakulmainen kolmio joka kattaa puolet koko ratkaisun alasta, millä päästään käsiksi kuvassa 12 esiintyvään kahdeksaan erikoisempaan ratkaisuun. Ratkaisujen välillä on huomattavan paljon siirtoja, kuvan vasemman laidan neljästä ratkaisusta on viisi siirtoa kustakin ja kuvan keskellä olevista ratkaisuista kuusi kustakin. Huomionarvoista näissä erikoisratkaisuissa on sekin, että niissä esiintyy vierekkäin laajennetun Ostomakhionin yhtenevät palaparit. Tähän palataan tutkielman seuraavassa osiossa, kun Ostomakhionin kaikkia ratkaisuja kootaan graafiksi.

Nyt on siis osoitettu kunkin aligraafin olevan Hamiltonin graafi. Kuvasta 8 nähdään, että jokaisesta aligraafista löytyy neljä perhettä, joista on vähintään viiden painoinen särmä viereisiin aligraafeihin. Valitsemalla pareittain kaksi tällaista perhettä voidaan koko Ostomakhionin suuri komponentti esittää Hamiltonin silmukkana. Kaikki Ostomakhionin supistetun version ei-erityiset ratkaisut voi siis halutessaan esittää jonona, jossa peräkkäisten ratkaisujen välillä on vain yksi siirto. Huomionarvoista on, että vaikka tut-



Kuva 12: Ydinperhe $\mathcal{P}_{134'2'}$ ja Hamiltonin silmukka.

kielmassa on kuvin esitetty vain pieni osa ratkaisuksista, voi loput ratkaisut päätellä tekemällä kullekin ydinratkaisulle perhetyyppinsä mukaiset siirrot sopivan kuvan mukaan.

4.3 Ostomakhionin supergraafi

Edellisen alaluvun tulokset pätevät Ostomakhionin supistetulle 11 palan versiolle. Tässä osiossa pohditaan, miten tulokset poikkeavat jos puhutaankin koko Ostomakhionista, sekä hahmotellaan graafia tilanteissa joissa laajennetaan ratkaisujen määrää myös samoihin eriäviin ratkaisuihin.

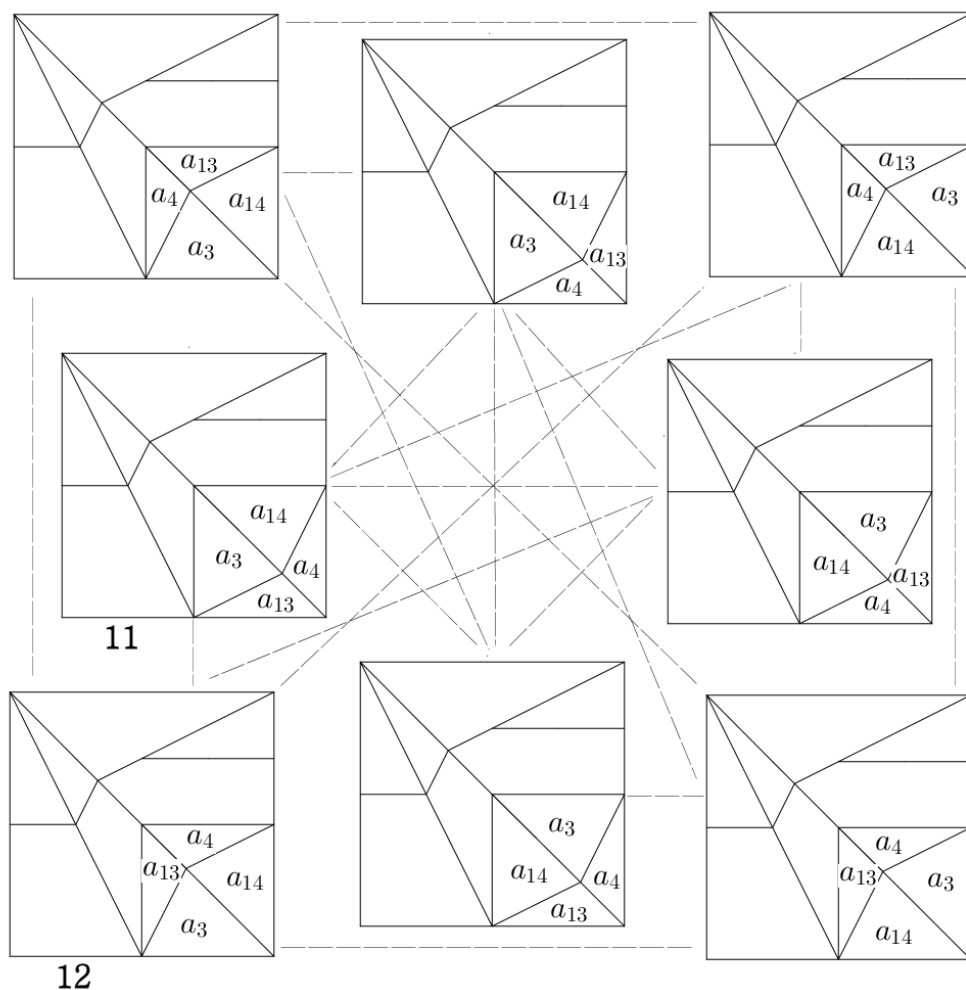
Kuten aiemmin on kerrottu, kahden palapareista ($\{a_1, a_2\}$ ja $\{a_9, a_{10}\}$) yhdistäminen ei muuta ratkaisujen määrää mitenkään. Kuvan 5 kolmioihin 1 ja 2 lisätään nämä palaparit ja ne esiintyvät jokaisessa ratkaisussa korvaamansa palan paikalla. Kolmas palapari $\{a_5, a_6\}$ kasvattaa sen sijaan ratkaisujen määrän kaksinkertaiseksi. Ydinkolmioista tämä palapari voitaisiin sijoittaa joko kolmioon 2 tai kolmioon 3. Näin syntyy siis kaksi vaihtoehtoista ydinkolmioiden nelikkoa, joista siis voidaan koota yhteensä 24 ydinratkaisua jotka voidaan jakaa kahdeksi 12 ratkaisun sarjaksi, jotka ovat muuten samanlaiset, mutta niissä palapari $\{a_5, a_6\}$ ja pala a_{13} on vaihdettu päik-

seen. Näin koko Ostomakhionin ei-erityisistä ratkaisuksista voidaan siis rakentaa kaksi kertaa edellisessä osiossa rakennettu aligraafi, kukin omasta sarjastaan ydinratkaisuja. Näiden kahden aligraafin välillä on siirtoja, esimerkiksi kuvassa 6 ensimmäisenä esiintyvän ydinratkaisun virittämässä perheessä \mathcal{P}_{1432} . Näin ollen Ostomakhionin kaikkien eri ei-erityisten ratkaisujen graafi on edelleen Hamiltonin graafi, kun silmukat yhdistetään edellisessä osiossa käytetyllä menetelmällä.

Seuraavaksi voidaan laajentua kaikkiin ei-erityisiin ratkaisuihin. Selvästi peilatuista ratkaisuksista voidaan rakentaa samanlainen Hamiltonin graafi, jonka jokaisesta ratkaisusta on siirto alkuperäisen graafin vastaavaan ratkaisuun, jolloin on saatu jälleen kaksinkertainen graafi kaksine silmukkoineen, joista voidaan jälleen yhdistää yksi suurempi silmukka. Samoin voidaan toimia ratkaisujen kiertojen ja niiden peilikuvien kanssa. Tällöin on saatu kahdeksankertainen Hamiltonin graafi. Edelleen on selvää, että vaihtamalla yhteneviä palapareja keskenään voidaan luoda kolme tällaista kahdeksankertaista graafia lisää. Kysymykseksi jää, voidaanko nämä kolme graafia kytkeä samoin tavoin osaksi alkuperäisen kahdeksangraafin silmukkaa, eli löytyykö silmukasta peräkkäisiä solmuja joista on siirrot näiden vaihtoehtograafien vastaaviin ratkaisuihin.

Kuvassa 12 on silmukkaan numeroitu ratkaisut 11 ja 12. Näissä ratkaisuissa yhtenevät palaparit esiintyvät vierekkäin sellaisella tavalla, että molemmista ratkaisuksista voidaan peilata kumpi tahansa yhtenevä palapari tai molemmat samaan aikaan ilman että ratkaisu muuttuu. Kuva 13 havainnollistaa tätä. Nyt siis sen sijaan, että ratkaisusta 11 siirryttäisiin suoraan ratkaisuun 12, voidaan sen sijaan vaihtaa esimerkiksi palat a_4 ja a_{13} keskenään peilaamalla, käydä läpi kaikki ratkaisut joissa nämä palat on vaihdettu ja päätyä lopulta ratkaisun 12 vastaavaan muunnokseen, vaihtaa sitten palat a_3 ja a_{14} keskenään ja jatkaa näin kunnes kaikki yhtenevän palaparin vaihtavat ratkaisut on käyty läpi. Näin on koottu Ostomakhionin kaikkien ei-erityisten ratkaisujen graafi ja hahmoteltu Hamiltonin silmukka niiden läpi.

Tietenkin kun puhutaan Ostomakhionin kaikista ratkaisuksista, mukaanlukien erityisratkaisut, ei Hamiltonin silmukkaa voida tehdä, sillä graafiin jää useampi komponentti. Siinä missä supistetun Ostomakhionin eri ratkaisujen graafissa on vain kaksi komponenttia (suuri ja pieni), on Ostomakhionin eri ratkaisujen graafissa jo kolme komponenttia, sillä palaparia $\{a_5, a_6\}$ ja palaa a_{13} ei voi vaihtaa keskenään laillisella siirrolla (ks. kuva 3. Myös muut yhtenevät palaparit kaksinkertaistavat pienien komponenttien lukumäärää siten, että Ostomakhionin kaikkien ratkaisujen graafissa on jo yhdeksän komponenttia, suuri komponentti ja kahdeksan pientä, joista kukin sisältää 16 ratkaisua (2 erikoisratkaisua sekä niiden kierrot ja peilaukset).



Kuva 13: Kaksi ratkaisua ja niistä johdettuja eriäviä ratkaisuja.

5 Lopuksi

Tämän tutkielman alkuperäisenä tarkoituksena on ollut yksinkertaisesti esitellä Ostomakhion, sekä sen kombinatoriikkaa ja ratkaisujen systemaattista esittämistä. Tutkielman edetessä lisätavoitteeksi on pyrkä jäsennyksen ja systemaattisen esityksen avulla osoittamaan Ostomakhionin käyttökelpoisuus kombinatoriikan ja graafiteorian perusteiden opettamisessa.

Mikäli Ostomakhionista teettää fyysisen kopion (tai kaksi, yksi supistettu versio ja yksi alkuperäinen), voi sen viedä koulumaailmaan, missä uskoisin pelin motivoivan oppilaita matemaattiseen pohdintaan. Ensimmäinen tehtävä on löytää aina yksi ratkaisu, seuraava tehtävä keksiä miten ratkaisusta pääsee toiseen ratkaisuun mahdollisimman pienellä vaivalla. Peli on kiinnostava niin peruskoululaiselle kuin lukiolaisellekin, ja vaativampia kysymyksiä voi esittää eriyttämisen nimissä osaavammille oppilaille.

Yksittäisellä oppitunnillakin voidaan antaa pelistä ja sen ratkaisuista oppilaille hyvä ymmärrys. Samalla voidaan antaa pohja kombinatoriikan oppimiselle, vaikka syvempi kombinatoriikan oppiminen vaatiikin enemmän. Ainakin systemaattisen etenemisen etuja ongelmaratkonnassa on pelillä helppo esitellä.

Toivon, että lukijalla on ollut tutkielman kanssa yhtä hauskaa kuin minulla.

Viitteet

- [1] Graham, Ron & Chung, Fan: *A tour of Archimedes' Stomachion* <http://math.ucsd.edu/~fan/stomach/>
- [2] Bragg, Graham: *On giants' shoulders - Great scientists and their discoveries from Archimedes to DNA* 1998, Hodder and Stoughton, London
- [3] Korhonen, Hannu: *Matematiikan historian henkilöhahmoja* 1995, MFKA-Kustannus Oy, Lahti
- [4] The Walters Art Museum, Baltimore, Maryland: *The Archimedes Palimpsest* <http://archimedespalimpsest.org/about/>
- [5] Junnila, Heikki: *Diskreettiä matematiikkaa*. Tampereen yliopisto
- [6] Koivisto, Pertti & Niemistö, Riitta: *Graafiteoriaa* 2001, Tampere